التمرين الأول

ليكن x و y عددين حقيقيين . نضع : $F(x;y) = \text{Arctan}\, x + \text{Arctan}\, y$

1] بيّن أن : $(\forall x \in \mathbb{R}^*)\quad F\left(x;\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{x}{|x|}$

2] نفترض في هذا السؤال أن $xy \neq 1$

أ) بيّن أنه يوجد k من $\mathbb{Z}$ بحيث : $F(x;y) = k\pi + \text{Arctan}\,\frac{x+y}{1-xy}$

ب) بيّن أن : $k \in \{-1;0;1\}$

ج) بيّن أن : $xy < 1 \Rightarrow k = 0$

د) بيّن أن : $(x>0\ ,\ xy>1) \Rightarrow k=1$

هـ) بيّن أن : $(x<0\ ,\ xy>1) \Rightarrow k=-1$

التمرين الثاني

لكل n من $\mathbb{N}$ و $n \geq 2$ ، نعتبر الدالة g_n المعرفة بما يلي $g_n(x) = 3 - 2nx - \cos 2x$

1] بيّن أن : $(\forall n \geq 2)\quad (\exists!\, u_n \in [0;\frac{\pi}{2}])\ ;\ g_n(u_n) = 0$

2] تحقق أن : $(\forall n \geq 2)(\forall x \in [0;\frac{\pi}{2}])\quad g_{n+1}(x) \leq g_n(x)$

3] استنتج أن : $(\forall n \geq 2)\quad u_{n+1} \leq u_n$

4] بيّن أن : $(\forall n \geq 2)\quad \frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{2}{n}$

التمرين الثالث

لتكن f الدالة المعرفة على $I = [0;+\infty[$ بما يلي : $f(x) = \text{Arctan}\left(\sqrt[3]{x} + \sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}\right)$

1] بيّن أن f تقابل من I نحو مجال J يتم تحديده .

2] ليكن x من I ؛ نضع $x = \tan^3 z$ حيث $0 \leq z < \frac{\pi}{2}$

أ) تحقق أن : $\sqrt[3]{x} + \sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}} = \tan\left(\frac{z}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$

ب) استنتج أن : $(\forall x \in I)\quad f(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\text{Arctan}(\sqrt[3]{x})$

ج) حدد $f^{-1}(x)$ لكل x من J .

التمرين الرابع

لتكن h الدالة العددية المعرفة بما يلي :

$$h(x) = \text{Arctan}\, 2x + \text{Arctan}\, x$$

1] بيّن أن h تقابل من $K =]\frac{1}{\sqrt{2}};+\infty[$ نحو مجال L يتم تحديده .

2] حدّد $h^{-1}(x)$ لكل x من L

3] حل المعادلة $\text{Arctan}\, 2x + \text{Arctan}\, x = \frac{\pi}{4}$

4] لكل x من I ، نضع $g(x) = f'(x)$ (أي : $g = f'$)

أ) بيّن أن : $g(\delta) = 0$; $(\exists!\ \delta \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[)$

ب) حدّد إشارة $g(x)$ على I

ج) أعط جدول تغيرات f على I

د) حدّد إشارة $f(x)$ على I.