التمرين الأول

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي

$$u_0 = 1 \quad \text{و} \quad (\forall n\in\mathbb{N})\ u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + \frac{1}{(n+1)^2}}$$

1) بيّن أن: $(\forall n\in\mathbb{N})\ u_n > 0$.

2) بيّن أن المتتالية (u_n) تزايدية.

3) نعتبر المتتالية $(v_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بما يلي: $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$

أ) بيّن أن: $(\forall k\in\mathbb{N}^*)\ \frac{1}{(k+1)^2} \leq \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{k^2}$

ب) استنتج أن: $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ 1 - \frac{1}{n+1} \leq v_n \leq 2 - \frac{1}{n}$

ج) بيّن أن (v_n) متقاربة وأن نهايتها L تحقق $1 \leq L \leq 2$

4) أ) بيّن أن $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ u_n = \sqrt{1+v_n}$

ب) نستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة وأعط تأطيراً لنهايتها l

التمرين الثاني

لتكن f دالة متصلة على $\mathbb{R}$ وتحقق:

$$\left.\begin{array}{l} (i)\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \quad \text{و} \quad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \\ (ii)\ (\forall (x;y)\in\mathbb{R}^2)\ |f(x) - f(y) + x + y| \leq \frac{|x-y|}{20} \end{array}\right\}$$

1) بيّن أن: $(\exists!\, \alpha\in\mathbb{R})\ ;\ f(\alpha) = 0$

2) بيّن أن $(\forall (x;y)\in\mathbb{R}^2)\ |f(x) - f(y)| \leq \frac{21}{20}|x-y|$

3) نعتبر المتتالية العددية $(a_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بما يلي:

$$a_0 = \frac{1}{2}\alpha \quad , \quad (\forall n\in\mathbb{N})\ a_{n+1} = a_n + f(a_n)$$

أ) بيّن أن: $(\forall n\in\mathbb{N})\ |a_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{20}|a_n - \alpha|$

ب) حدد $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$

4) لكل n من $\mathbb{N}$، نضع $A_n = \sum_{k=0}^{n} f(a_n)$. حدّد $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n$

التمرين الثالث

ليكن المجال $I = [0; \frac{\pi}{2}]$. f هي الدالة المعرفة على I بما يلي

$$f(x) = \cos x + \sin x - x^2$$

1) بيّن أن: $(\exists \lambda\in]0; \frac{\pi}{2}[)\ ;\ f(\lambda) = 0$

2) بيّن أن λ حل للمعادلة ذات المجهول t: $t = \sqrt{\sqrt{2}\cos(t - \frac{\pi}{4})}$

3) بيّن أن: $1 < \lambda < \sqrt[4]{2}$

.../...