Matière : Sciences Physiques

- EL BADAOUI -

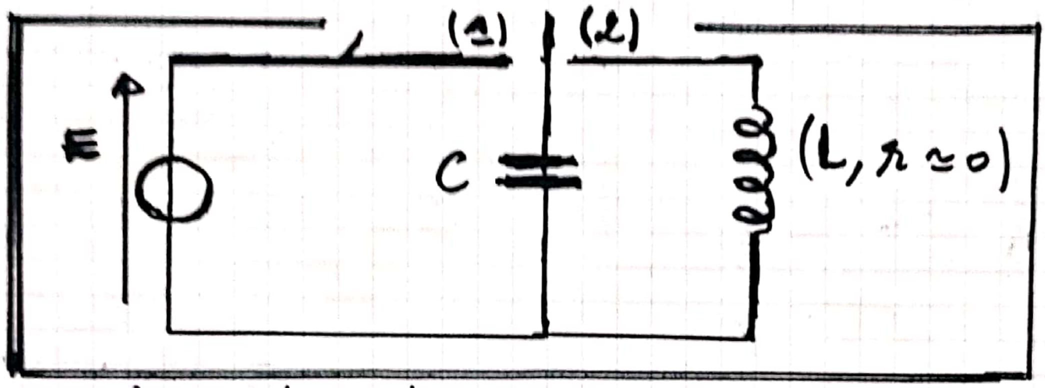
Circuit RLC : libre

07-72-96-61-01

2ème BAC SC MAth

I/ échange d'énergie entre le condensateur et la bobine

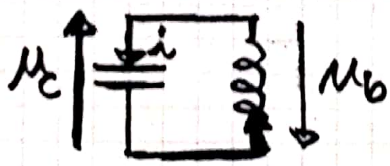
on considère le circuit ci-contre.



on charge le condensateur puis on bascule le commutateur en position (2) ⟹ le circuit (LC) est le siège des oscillations électriques (càd un échange d'énergie entre le condensateur et la bobine par la grandeur d'énergie $E = \frac{1}{2} C E^2$.

Rem. le circuit constitué du condensateur et la bobine est appelé circuit libre càd n'est soumis à aucun apport d'énergie ⟹ le circuit n'est pas connecté à aucun générateur.

II/ l'Equation Differentielle :

Circuit idéale		

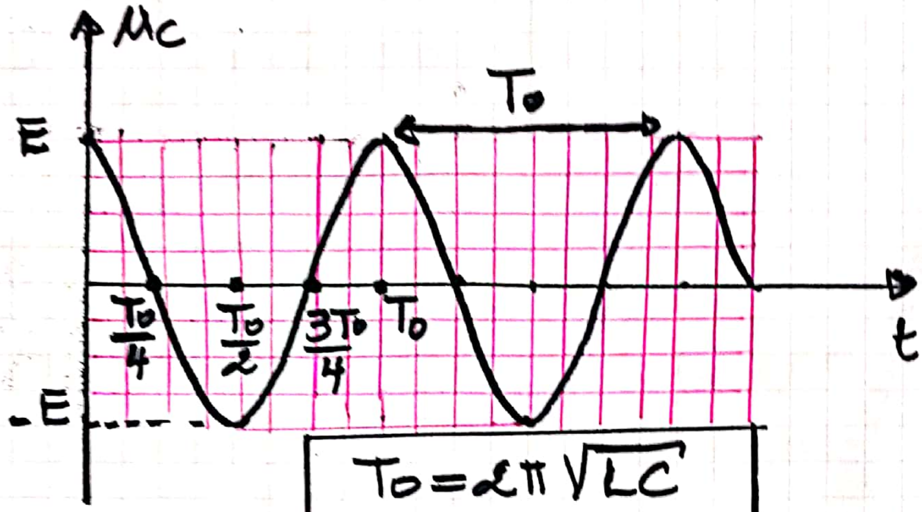
$u_C(t) \Rightarrow \frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{1}{LC}u_C = 0$

$\Downarrow$

$$\boxed{u_C(t) = E \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)}$$

Dans notre cas : $\varphi = 0$

* φ : phase à l'origine (rad)



$$\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{LC}}$$

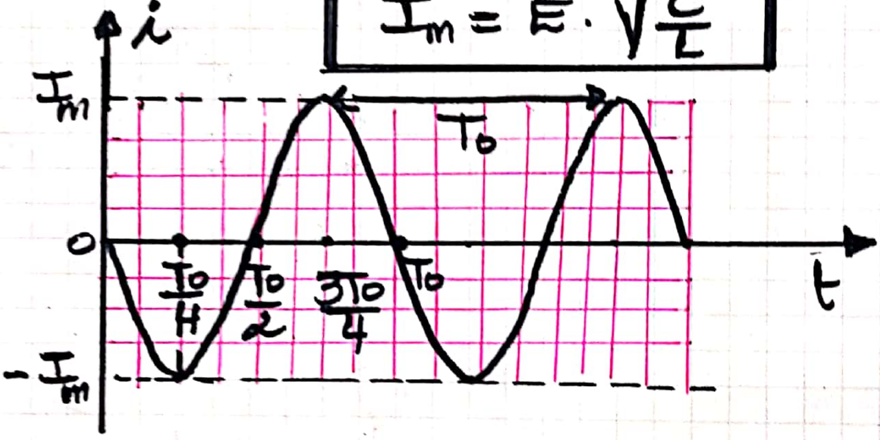
T_0 : période propre des oscillations (s)

$i \Rightarrow \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{1}{LC}i = 0$

$\Downarrow$

$$\boxed{i(t) = I_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right) \quad \varphi = +\frac{\pi}{2}}$$

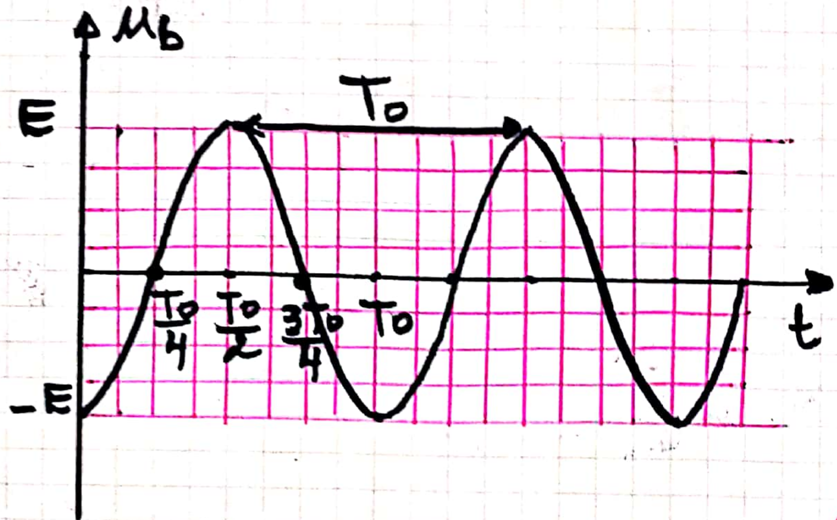
$$\boxed{I_m = E \cdot \sqrt{\frac{C}{L}}}$$



$u_b \Rightarrow \frac{d^2u_b}{dt^2} + \frac{1}{LC}u_b = 0$

$\Downarrow$

$$\boxed{u_b(t) = E \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right) \quad \varphi = -\pi}$$



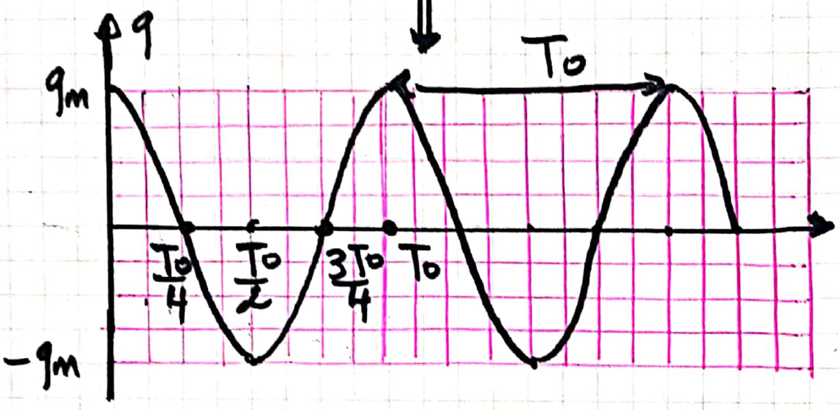
Rm.

$$q \Rightarrow \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0$$

$$\Downarrow$$

$$q(t) = q_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

dans notre cas : $\varphi = 0$ et $q_m = CE$



Rm. : $i(t) = C \cdot \frac{du_C}{dt}$ avec $u_C(t) = E\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$

$$\Rightarrow i(t) = -CE \cdot \frac{2\pi}{T_0} \sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

$$\Rightarrow i(t) = CE \cdot \frac{2\pi}{T_0} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow i(t) = CE \cdot \frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow i(t) = E \cdot \sqrt{\frac{C}{L}} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

poson $I_m = E \cdot \sqrt{\frac{C}{L}}$ donc :

$$\boxed{i(t) = I_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)}$$

dans notre cas : $\varphi = 0$

III / l'energie totale de circuit.

on a : $\boxed{u_c(t) = E \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi\right)}$

et $i = C \cdot \frac{du_c}{dt} = -CE \cdot \frac{2\pi}{T_0} \sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi\right)$

$\Rightarrow i(t) = -CE \cdot \frac{1}{\sqrt{LC}} \sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi\right)$

$\Rightarrow \boxed{i(t) = -E \cdot \sqrt{\frac{C}{L}} \sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi\right)}$

on a $E_T = E_e(t) + E_m(t)$

$= \frac{1}{2} C u_c^2 + \frac{1}{2} L i^2$

$E_T = \frac{1}{2} C \left[E \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi\right)\right]^2 + \frac{1}{2} L \left(-E\sqrt{\frac{C}{L}} \sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi\right)\right)^2$

$\Rightarrow E_T = \frac{1}{2} CE^2 \cdot \cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi\right) + \frac{1}{2} L \cdot E^2 \cdot \frac{C}{L} \sin^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi\right)$

$\Rightarrow E_T = \frac{1}{2} CE^2 \cdot \cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi\right) + \frac{1}{2} CE^2 \sin^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi\right)$

$\Rightarrow E_T = \frac{1}{2} CE^2 \left[\cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi\right) + \sin^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi\right)\right]$

$\Rightarrow \boxed{E_T = \frac{1}{2} CE^2 = c^{te}}$ $\forall t > 0$

or : $I_m = E \cdot \sqrt{\frac{C}{L}}$ et $q_m = CE$

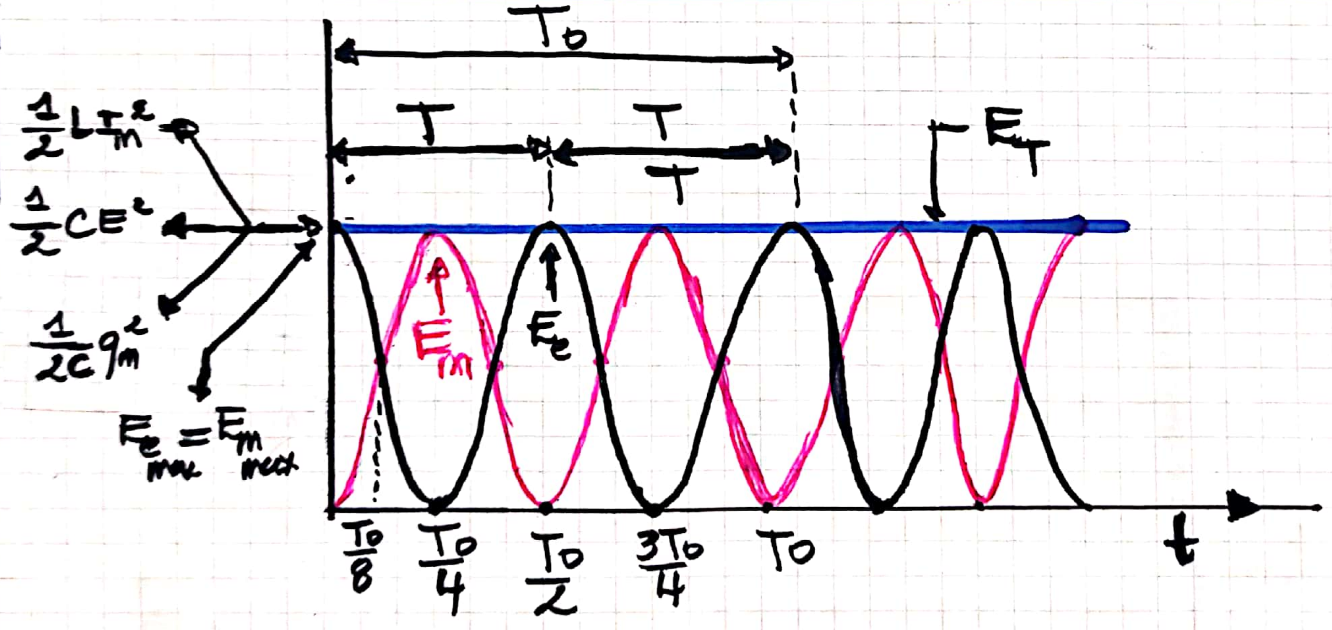
on écrit $\boxed{E_T = \frac{1}{2} CE^2 = \frac{1}{2} L I_m^2 = \frac{1}{2C} q_m^2}$

I) Diagramme des énergies.

on a : $E_e(t) = \frac{1}{2} C E^2 \cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0} t\right)$

$E_m(t) = \frac{1}{2} C E^2 \sin^2\left(\frac{2\pi}{T_0} t\right)$

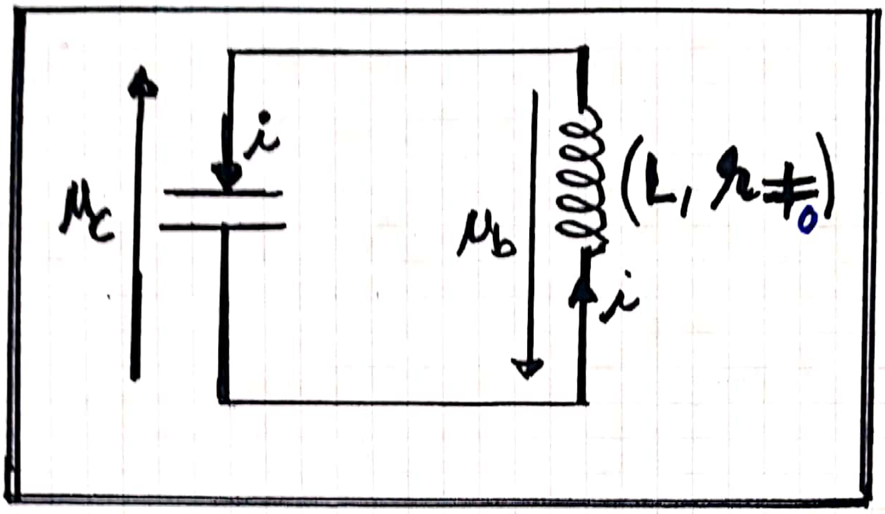
et se sont deux fonctions périodique de période T tq : $2T = T_0$ on a :



Rem

$$E_e(t) = E_m(t) \Rightarrow t_k = \frac{T_0}{8}(2k+1)$$
$$k \in \mathbb{N}$$

IV / Circuit réelle



$$u_C + u_b = 0$$

$$\Rightarrow u_C + ri + L\frac{di}{dt} = 0 \quad ; \quad i = C.\frac{du_C}{dt}$$

$$\Rightarrow u_C + rC.\frac{du_C}{dt} + L.\frac{d\left(C\frac{du_C}{dt}\right)}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + rC.\frac{du_C}{dt} + u_C = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{r}{L}.\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC}u_C = 0}$$

la résolution de cette équation. poson $\begin{cases} \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \\ 2\lambda = \frac{r}{L} \end{cases}$

donc l'équation est devenue :

$$\boxed{\frac{d^2u_C}{dt^2} + 2\lambda\frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C = 0}$$

il suffit de résoudre l'équation Caractéristique

$$\boxed{r^2+2\lambda r+\omega_0^2=0}$$

selon le signe du discriminant réduit :

$$\Delta' = \lambda^2-\omega_0^2$$

* si $\Delta'>0 \Rightarrow r_1=-\lambda+\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}\ ,\ r_2=-\lambda-\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}$

$$\boxed{\Rightarrow u_c(t)=K_1e^{r_1t}+K_2e^{r_2t}}$$

$\Downarrow$

régime apériodique

* si $\Delta'=0$. on a $\Delta'=0 \Rightarrow \omega_0^2=\lambda^2 \Rightarrow r=-\lambda$

$$\Rightarrow \omega_0=\lambda \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{LC}}=\frac{R}{2L}$$

$$\Rightarrow \boxed{R=2\sqrt{\frac{L}{C}}}$$

appelé résistance Critique

$$\boxed{u_c(t)=(K_1t+K_2)e^{-\lambda t}}$$

régime Critique

* si $\Delta'<0 \Rightarrow \lambda^2-\omega_0^2<0 \Rightarrow \lambda^2-\omega_0^2=-(\omega_0^2-\lambda^2)$

$$=-\omega^2$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \omega_0^2 - \lambda^2$$

$$\Rightarrow \Delta' = -(\omega_0^2 - \lambda^2) = -\omega^2 = (i\omega)^2$$

$$r_1 = -\lambda + i\omega \text{ et } r_2 = -\lambda - i\omega$$

$$\Rightarrow u_c(t) = e^{-\lambda t}(K_1 \cos\omega t + K_2 \sin\omega t)$$

ou

$$u_c(t) = A e^{-\lambda t} \cdot (\cos(\omega t + \varphi))$$

$$\Rightarrow \boxed{u_c(t) = A e^{-\lambda t} \cdot \cos(\omega t + \varphi)}$$

$$\Downarrow$$

régime pseudo-périodique

Rem: Importante : on a : $\omega^2 = \omega_0^2 - \lambda^2$

si $\omega_0^2 \gg \lambda^2 \Rightarrow \omega_0 \gg \lambda$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{LC}} \gg \frac{r}{2L}$$

$$\Rightarrow \boxed{r \ll 2\sqrt{\frac{L}{C}}}$$

donc on a $\omega_0^2 \gg \lambda^2 \Rightarrow \omega_0^2 - \lambda^2 \simeq \omega_0^2 = \omega^2$

$$\Rightarrow \omega \simeq \omega_0 \Rightarrow T \simeq T_0$$

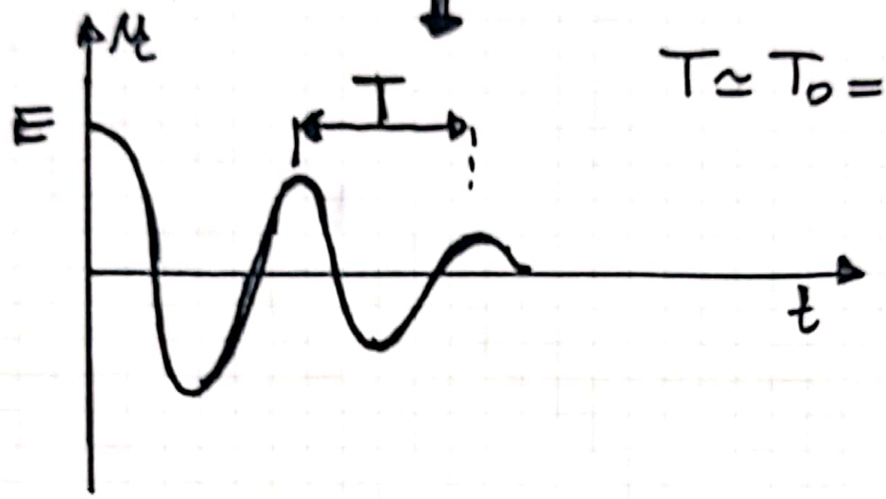
donc :

$$u_c(t) = A e^{-\lambda t} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\boxed{u_c(t) = A e^{-\lambda t} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} t + \varphi\right)}$$

$$T = T_0$$

pseudo-période — période propre



$$T \simeq T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$$

Rem : montrons que l'energie E_T decroît au cours du temps.

$$E_T = E_e + E_m = \frac{1}{2}Cu_c^2 + \frac{1}{2}Li^2$$

$$\frac{dE_T}{dt} = \frac{1}{2}C\left(2u_c \cdot \frac{du_c}{dt}\right) + \frac{1}{2}L\left(2i\frac{di}{dt}\right)$$

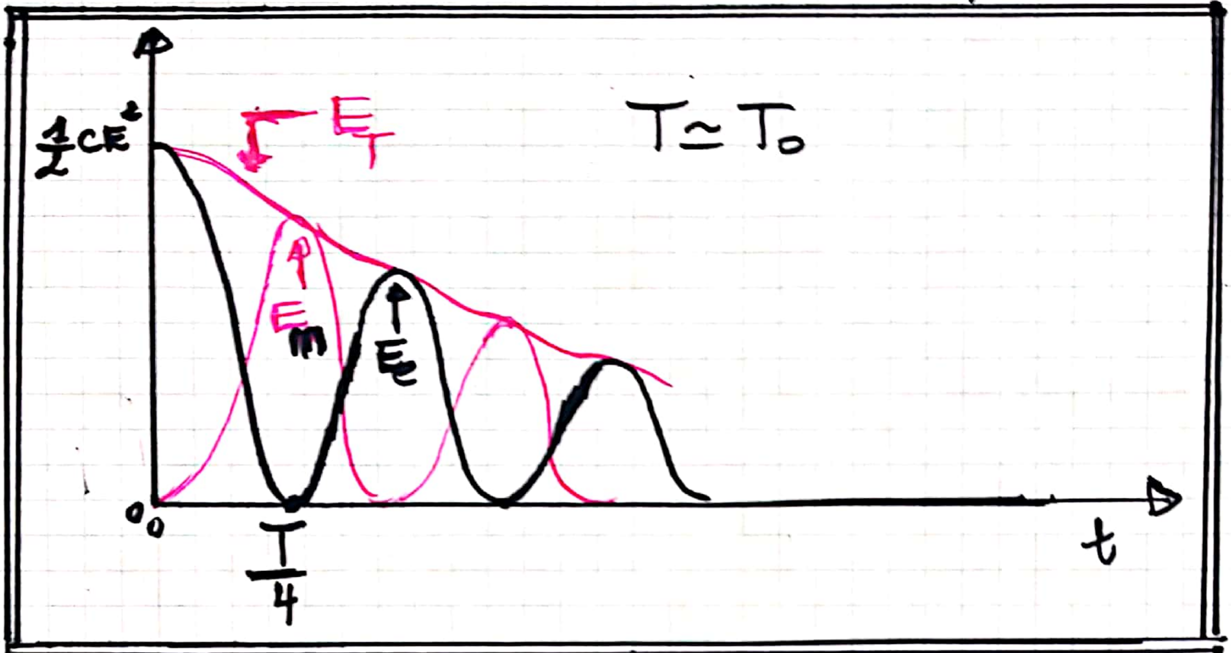
$$= u_c \cdot C \cdot \frac{du_c}{dt} + i\, L\frac{di}{dt}$$

$$= i\, u_c + L \cdot \frac{di}{dt}\, i = i\, \underbrace{\left[L \cdot \frac{di}{dt} + u_c\right]}_{-ri}$$

$$= i(-ri) = -ri^2$$

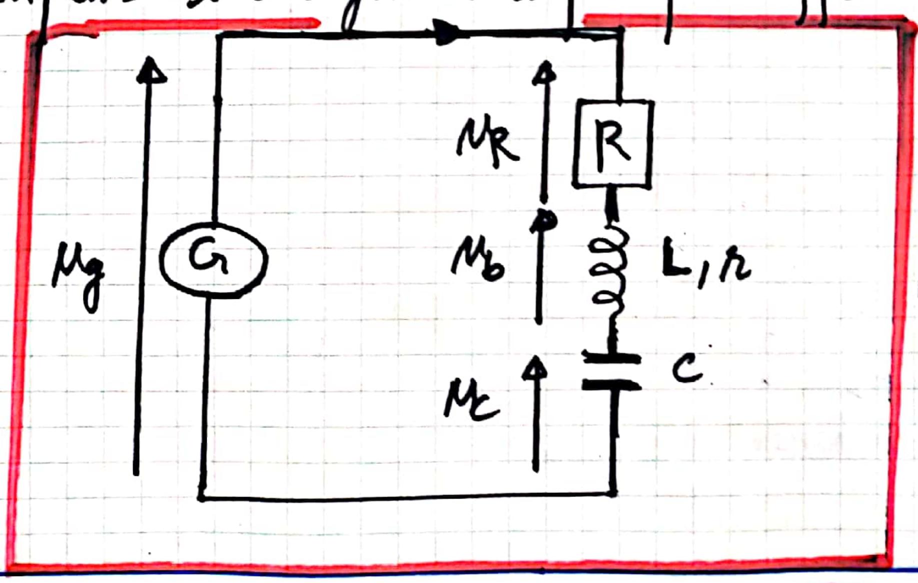
$$\Longrightarrow \boxed{\frac{dE_T}{dt} = -ri^2 < 0}$$

donc l'énergie totale diminue au cour du temps a cause de l'effet de joule. (Dissipation de l'énergie)



VI/ Entretien des oscillation

l'energie totale d'un circuit RLC serie décroit progressivement par effet joule dans la résistance du circuit. Pour entretenir les oscillations. on ajoute au circuit un générateur linéaire qui compense l'energie dissipée par effet joule !



$$u_g = Ki$$

on a $u_g = u_R + u_C + u_b$

$$\Rightarrow Ki = Ri + u_C + ri + L\cdot\frac{di}{dt}$$

$$\Rightarrow L\frac{di}{dt} + (R+r-K)i + u_C = 0$$

or : $i = C\cdot\frac{du_C}{dt}$

$$\Rightarrow LC\cdot\frac{d^2u_C}{dt^2} + (R+r-K)C\frac{du_C}{dt} + u_C = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2u_C}{dt^2} + \left(\frac{R+r-K}{L}\right)\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC}u_C = 0}$$

pour que les oscillations soit entretenue Il faut que l'équation s'écrit sous la forme

$$\boxed{\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{1}{LC}u_C = 0}$$

donc : $\left(\frac{R+r-K}{L}\right)u_C = 0$

$$\Rightarrow R+r-K=0$$

$$\Rightarrow K = R+r = R_{tot}$$

la résistance totale de circuit