Exercice

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N}) \ ; \ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$

1) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \ ; \ u_n \geq 1$

b) Étudier la monotonie de la suite (u_n).

2) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \ ; \ 2 \leq u_n^2 - u_{n-1}^2 \leq 2 + u_n - u_{n-1}$ **(1)**

et $2n \leq u_n^2 - 1 \leq 2n + u_n - 1$ **(2)**

b) En déduire que la suite (u_n) est divergente.

3) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $1-\frac{1}{u_n} \leq \frac{2n}{u_n^2} \leq 1-\frac{1}{u_n^2}$

b) En déduire que : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\sqrt{2n}}{u_n} = 1$

Exercice 34

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_{n+1} = \sqrt{n+1+u_n}$

et $u_0 = 1$

1) Calculer u_1 et u_2 , et montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$; $0 < u_n$

2) Montrer que $(\forall x \in [0; +\infty[)$; $\sqrt{x} \leq \frac{1}{2}(1+x)$

3) a- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $\sqrt{n} \leq u_n$

b- Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n \leq n + \frac{1}{2^n}$

c- Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $u_n \leq \sqrt{2n}$

En déduire que : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_n}{\sqrt{n}} = 1$

4) Soit (v_n) la suite numérique définie par : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $v_n = u_n - \sqrt{n}$; montrer que (v_n) est convergente.

Exercice 41

I) Soit (u_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \ ; \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) Calculer u_2 et u_3

2) Montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$ on a :

a) $u_n \geq n$ b) $u_n \times u_{n+2} + (-1)^{n+1} = (u_{n+1})^2$

II) Soit (α_n) et (β_n) les suites définies par : $\alpha_n = \frac{u_{2n-1}}{u_{2n}}$ et $\beta_n = \frac{u_{2n}}{u_{2n+1}}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$

1) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $\beta_n - \alpha_n = \frac{1}{u_{2n} \cdot u_{2n+1}}$

b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $\alpha_n < \beta_n$ et $0 < \beta_n - \alpha_n < \frac{1}{n}$ (utiliser I)2) b))

2) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $\alpha_{n+1} - \alpha_n = \frac{1}{u_{2n} \cdot u_{2n+2}}$ (utiliser I) 2) b))

b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $\alpha_n = \frac{1}{\beta_n} - 1$

c) En déduire la monotonie de chacune des suites (α_n) et (β_n).

3) a) Montrer que les suites (α_n) et (β_n) sont adjacentes.

b) Calculer la limite de chacune des suites (α_n) et (β_n).

Exercice

On considère les suites numériques (a_n) et (b_n) définies par :

$$\begin{cases} a_0 = 0\,;\, a_1 = 1 \\ \left(\forall n \in \mathbb{N} - \{0;1\}\right)\ ;\ a_n = na_{n-1} + a_{n-2} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} b_0 = b_1 = 1 \\ \left(\forall n \in \mathbb{N} - \{0;1\}\right)\ ;\ b_n = nb_{n-1} + b_{n-2} \end{cases}$$

1) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ ;\ a_{n-1}\,b_n + a_n\,b_{n-1} = (-1)^n$

b) Montrer que la suite (b_n) est croissante et que $b_n > (n+1)b_{n-2}$ pour tout de $\mathbb{N}$, tel que $n \geq 3$

2) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = \dfrac{a_{2n-1}}{b_{2n-1}}$ et $v_n = \dfrac{a_{2n}}{b_{2n}}$

a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ ;\ 0 < u_n - v_n < \dfrac{2}{(n+1)!}$

b) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Exercice

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ (\forall n \in \mathbb{N}) \ ; \ u_{n+1} = u_n - u_n^2 \end{cases}$

I) 1) Déterminer la nature de la suite (u_n) dans chacun des cas: $u_0 = 0$

et $u_0 = 1$

2) a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante

b) Montrer que si la suite (u_n) est convergente alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

c) Montrer que si $u_0 < 0$ ou $u_0 > 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

II) On suppose que : $u_0 \in]0; 1[$

1) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ 0 < u_n < 1$

b) En déduire que la suite (u_n) est convergente

2) Soit (s_n) la suite définie par : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ s_n = \sum\limits_{k=0}^{k=n} \frac{u_k^2}{1+u_k}$

a) Vérifier que : $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k^2 = u_0 - u_{n+1}$ en déduire que : $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} u_k^2 = u_0$

b) Montrer que : $(\forall k \in \mathbb{N})\ ;\ 0 < \frac{u_k^2}{1+u_k} < u_k^2$

c) Montrer que la suite (s_n) est convergente.

3) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} > 1$

b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ 0 < u_n < \frac{1}{n+1}$