Exercice 15

1ère partie:

Soit g la fonction numérique définie sur $I = [-1, 0[\cup]0, +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{(x+1)^2}{x(x+2)} - \ln|x(x+2)|$$

1) Dresser le tableau de variations de la fonction g

2) a- Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle : $]0, +\infty[$

b- En déduire le signe de $g(x)$ sur I.

2ème partie:

Soit f la fonction numérique définie sur $D = \mathbb{R} - \{-2; 0\}$ par:

$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln|x(x+2)|}{(x+1)^2} & ; x \neq -1 \\ f(-1) = -1 \end{cases}$ et soit $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1) Montrer que la droite (Δ) d'équation $x = -1$ est un axe de symétrie pour $(\mathscr{C}_f)$.

2) a- Calculer : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$

b- Montrer que la fonction f est continue en -1 (on peut utiliser le résultat suivant : $\left(\forall t \in \left]0, \frac{1}{4}\right[\right), -\frac{t^2}{2} - t^3 \leqslant \ln(1-t) + t \leqslant -\frac{t^2}{2}$

4) a- Montrer que : $(\forall x \in I - \{-1\})\ ; f'(x) = \dfrac{2}{(x+1)^3} \cdot g(x)$.

b- Vérifier que $f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha(\alpha+2)}$ puis dresser le tableau de variations de f sur D.

5) a- Déterminer les points d'intersection de $(O; \vec{i})$ avec la courbe $(\mathscr{C}_f)$.

b- Tracer $(\mathscr{C}_f)$ (on prend : $\alpha \simeq 1,14$ et $f(\alpha) \simeq 0,28$).

Exercice

Exercice

Soit n est un élément de $\mathbb{N}^* - \{1\}$, on considère la fonction f_n définie sur $]0;+\infty[$ par : $f_n(x) = -x^2 + 2 + n\ln(x)$

1) a- Calculer : $\lim\limits_{x\to 0^+} f_n(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$.

b- Etudier les variations de f_n.

2) On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = x\ln x + 2 - x$

3) Calculer $g'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$; puis étudier les variations de g.

b- En déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) \,;\, g(x) > 0$

3) a- Montrer que : $f_n\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right) > 0$

b- En déduire que l'équation $f_n(x) = 0$ admet deux solutions u_n et v_n dans $\mathbb{R}_+^*$ (On suppose que : $u_n < v_n$).

c- Calculer : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

4) a- Montrer que : $(\forall n \geq 2) \,;\, u_n \leq 1$

b- Vérifier que : $(\forall n \geq 2) \,;\, f_{n+1}(u_n) = \ln(u_n)$

c- Montrer que $(u_n)_{n\geq 2}$ est croissante et convergente.

d- Calculer : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice

A/ 1) Montrer que :

$$(\forall x > -1) ; x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3(x+1)} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

2) Montrer que : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2}$

B/ On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-1; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{\ln(1+x)} ; x \neq -1 \text{ et } x \neq 0 \\ f(0) = 1 \text{ et } f(-1) = 0 \end{cases}$$

Soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1) a- Montrer que la fonction f est continue sur l'intervalle $[-1; +\infty[$.

b- Etudier la dérivabilité de la fonction f à droite en -1 puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

c- Montrer que la fonction f est dérivable en 0, puis déterminer une équation de tangente à la courbe (C) au point $A(0; 1)$.

2) a- Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$, donner une interprétation géométrique au résultat obtenu.

b- Montrer que la fonction f est dérivable sur les intervalles $]-1;0[$ et $]0;+\infty[$ puis calculer $f'(x)$ pour tout réel x de $]-1;0[\cup]0;+\infty[$.

3) a- Montrer que : $(\forall x>-1);(x+1)\ln(x+1)-x\geq 0$

b- Dresser le tableau de variations de la fonction f.

c- Tracer la courbe (C).

4) Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0=e \\ (\forall n\in\mathbb{N});u_{n+1}=f(u_n)\end{cases}$

a- Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N});u_n>e-1$

b- Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est strictement décroissante et en déduire qu'elle est convergente.

c- Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n=e-1$.

Exercice

I/ On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par :

$g(x)=-x\ln(x)+2x-2$

1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

2) Montrer que g est strictement croissante sur $]0;e]$ et strictement décroissante sur $[e;+\infty[$.

3) a- Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α sur $]e;+\infty[$ et que $4<\alpha<5$ (On donne : $\ln 2<\frac{3}{4}$ et $\ln 5>\frac{8}{5}$)

b- En déduire que g est positive sur $[1;\alpha]$ et négative sur $]0;1]$ et sur $[\alpha;+\infty[$ (Remarquer que : $g(1)=0$)

II/ Soit la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\ln^2(x)}{x-1} & ; x\neq 1 \\ f(1)=0 \end{cases}$

1) a- Montrer que f est continue en 1.

b- Montrer que f est dérivable en 1.

2) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

3) a- Montrer que : $(\forall x\in]0;+\infty[-\{1\})\,;\, f'(x)=\dfrac{\ln(x)}{x(x-1)^2}\times g(x)$

b- Montrer que : $f(\alpha)=4\left(\dfrac{\alpha-1}{\alpha^2}\right)$

c- Montrer que : $f(\alpha)\in]0;1[$

d- Montrer que f est strictement croissante sur $]0;\alpha]$ et strictement décroissante sur $[\alpha;+\infty[$.

III/ Soit F la fonction primitive de f sur $]0;+\infty[$ telle que : $F(\alpha)=\alpha$.

1) Montrer que F est strictement décroissante sur $]0;1]$ et strictement croissante sur $[1;+\infty[$.

2) Montrer que : $(\forall x \in]0;\alpha]) ; F(x) \geq x$

3) Montrer que : $(\exists c \in]1;\alpha[) ; \alpha - F(1) = f(c)(\alpha - 1)$

4) On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = c$ et pour tout n de $\mathbb{N}$:

$u_{n+1} = F(u_n)$

a- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; c \leq u_n \leq \alpha$

b- Montrer que la suite (u_n) est croissante, en déduire qu'elle est convergente.

c- En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que :

$(\forall (x;y) \in ([c;\alpha])^2) ; |F(x) - F(y)| \leq f(\alpha)|x - y|$

d- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_n - \alpha| \leq (f(\alpha))^n(\alpha - c)$

En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.