ercice 64

rtie 1 : On considère la fonction $h$ définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$h(x) = \frac{x}{1+x^2} - Arc\tan(x)$$

soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

$\|\vec{i}\| = 1 \ cm)$

) Dresser le tableau de variations de $h$, puis déduire le signe de $h(x)$ pour
out $x$ de $\mathbb{R}$.

) Tracer la courbe $(C)$.

) Calculer en $cm^2$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $(C)$ et les
roites d'équation : $x = 0$ ; $x = 1$ et $y = 0$ .

artie 2 :

) a- Montrer que : $(\forall t \in \mathbb{R})$ ; $0 \leq 1 - \frac{1}{1+t^2} \leq t^2$

b- En déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$ ; $0 \leq x - Arc\tan x \leq \frac{x^3}{3}$

2) Soit $g$ la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} g(x) = \dfrac{Arc\tan(x)}{x} \ ; \ x \neq 0 \\ g(0) = 1 \end{cases}$$

a- Montrer que la fonction $g$ est continue sur $\mathbb{R}$.

b- Montrer que la fonction $g$ est dérivable en $x_0 = 0$.

c- Montrer que : $(\forall x \in [1; +\infty[)\ ;\ 0 \leq \int_1^x g(t)\,dt \leq \frac{\pi}{2}\ln x$ **(1)**

**Partie 3:** Soit $f$ la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{x}\int_0^x g(t)\,dt\ ;\ x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

et soit $(\Gamma)$ la courbe représentative de la fonction $f$ dans un repère orthonormé.

1) Étudier la parité de $f$.

2) a- Montrer que : $(\forall x \in ]0; +\infty[)\ ;\ 0 \leq 1 - f(x) \leq \frac{x^2}{9}$

b- Montrer que $f$ est con=tinue en 0.

c- Étudier la dérivabilité de $f$ en 0.

3) En utilisant la double inégalité (1) , montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ , **puis** déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

4) a- Vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{R}^*)\ ;\ x^2 f'(x) = Arc\tan x - \int_0^x g(t)\,dt$

b- Pour tout $x$ de $\mathbb{R}^*$ on pose : $\varphi(x) = x^2 f'(x)$ et $\varphi(0) = 0$

Vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{R}^*)\ ;\ x\varphi'(x) = h(x)$

(+) (−)

c- Dresser le tableau de variations de $f$.

5) Construire la courbe $(\Gamma)$.

## Exercice 63

Soit $f$ la fonction numérique de la variable réelle $x$ définie par :

$$f(x) = x.\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

et $(C_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) a) Vérifier que la fonction $f$ est paire.

b) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)$ ; $e^{4x} + 4xe^{2x} - 1 > 0$.

c) Dresser le tableau de variations de $f$.

2. a) Étudier les branches infinies de $(C_f)$ ; puis étudier la position relative de $(C_f)$ avec son asymptote oblique.

b) Tracer $(C_f)$.

3) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$; $\frac{x}{2e^{2x}} \leq \frac{x}{e^{2x}+1} \leq \frac{e^x}{e^{2x}+1}$

4) Soit $(u_n)$ et $(v_n)$ et $(w_n)$ les suites définies par :

$(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n = \int_0^n \frac{x}{e^{2x}+1}dx$ ; $v_n = \int_0^n \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$ et $w_n = \int_0^n \frac{x}{2e^{2x}}dx$

a) Calculer $(v_n)$ et $(w_n)$ en fonction de $n$ ;

b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $w_n \leq u_n \leq v_n \leq \frac{\pi}{4}$

c) Montrer que la suite $(u_n)$ est croissante et convergente.

d) Soit $a_n$ l'aire de la partie du plan limité par la courbe $(C_f)$ et les droites d'équations : $y = x$ et $x = 0$ et $x = n$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Montrer que : $\frac{1}{4} \leq \lim_{n \to +\infty} a_n \leq \frac{\pi}{2}$

## Exercice 59

### Partie 1:

On considère la fonction $f$ de la variable réelle $x$ définie sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ par :

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{\cos t}\,dt$$

1) Montrer que $f$ est strictement croissante sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

2) a-En utilisant un changement de variable en posant $y = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$,

montrer que : $\left(\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\right)$ ; $f(x) = \ln\left(\frac{1 + \sin x}{\cos x}\right)$

b-Montrer que $f$ est une fonction impaire.

3) Montrer que $f$ est une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ vers un intervalle $J$ que l'on déterminera.

4) Pour tout élément $t$ de $\mathbb{R}$ ; On pose : $\varphi(t) = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$

Vérifier que : $\left(\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\right) ; \varphi(f(x)) = f'(x)$

Partie 2:

Soit $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \int_0^x \frac{1}{\varphi(t)} dt$.

et $(C)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Montrer que la fonction $g$ est impaire.

2) a-Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; g(x) = 2Arc\tan(e^x) - \frac{\pi}{2}$.

b- Dresser le tableau de variations de la fonction $g$ , puis tracer la courbe (C).

c- Montrer que $g$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

3) a- Montrer que la fonction $gof$ est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ ,

et que : $\left(\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\right) ; (gof)'(x) = 1$

b- En déduire que : $\left(\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\right) ; (gof)(x) = x$

4) Montrer que : $\left(\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\right) ; (\forall y \in \mathbb{R}) ; y = \int_0^x \frac{1}{\cos t} dt \Longleftrightarrow x = \int_0^y \frac{1}{\varphi(t)} dt$