Exercice

Soit n un entier naturel non nul. On considère la fonction f_n définie sur $]0;+\infty[$ par : $f_n(x)=\dfrac{e^x-1}{x}+n\,ln(x)$, et soit (C_n) la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) Calculer les limites $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$ et $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$

2) Étudier les branches infinies de (C_n).

3) a) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})\,;1+(x-1)e^x\geq 0$

b) Déterminer les variations de f_n et dresser son tableau de variations.

4) Étudier la position relative de (C_n) et (C_{n+1}).

5) Montrer que toutes les courbes (C_n) passent par un point fixe B dont on donnera les coordonnées.

6) a) Montrer qu'il existe un unique réel α_1 de l'intervalle $[0,2;0,9]$ tel que : $f_1(\alpha_1)=0$

b) Montrer que : $(\forall n\in(\mathbb{N}^*-\{1\}))\,;f_n(\alpha_1)<0$

c) Montrer que : $(\forall n\in(\mathbb{N}^*-\{1\}));(\exists!\alpha_n\in[\alpha_1;1])\,;f_n(\alpha_n)=0$

7) a) Montrer que : $(\forall x\in\,]0;1])\,;\dfrac{e^x-1}{x}\leq e-1$

b) En déduire que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\,;ln(\alpha_n)\geq\dfrac{1-e}{n}$

c) Déduire la limite de la suite $(\alpha_n)_{n\geq1}$

8) Tracer dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ les courbes (C_1) et (C_2).

Exercice 30

Partie 1;

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=1-x^3e^{-x}$ et soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

b) Étudier les branches infinies de la courbe (C).

2) Étudier les variations de f.

3) Montrer que l'équation : $f(x)=0$ admet deux solutions α et β, telles que $1<\alpha<3<\beta$

4) Tracer la courbe (C) ; (on prend $\alpha\simeq1,9$ et $\beta\simeq4,5$)

Partie 2:

Soit n un entier naturel tel que : $n \geqslant 4$

et soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = 1 - x^n e^{-x}$

1) Dresser le tableau de variations de la fonction f_n suivant la parité de n.

2) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet deux solutions u_n et v_n.

telles que $1 < u_n < n < v_n$

3) a) Montrer $(\forall n \geqslant 5)$; $f_n(u_{n-1}) = (u_{n-1})^{n-1} e^{-u_{n-1}}(1 - u_{n-1})$

b) En déduire que $(\forall n \geq 5)$; $f_n(u_{n-1}) < 0$

c) En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 4}$ est décroissante et qu'elle est convergente.

4) On pose $u = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

a) Montrer que $(\forall n \geqslant 4)$; $1 - u^n e^{-u} \geqslant 0$

b) On suppose que $u > 1$, calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 - u^n e^{-u}$

c) Déduire la valeur de u.

xercice 31

Partie A: On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x)=(x+2)e^{-\frac{2}{x}}\,;\, x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

et soit (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité $2cm$)

1) a) Montrer que f est continue à droite en 0.

b) Montrer que f est dérivable à droite en 0.

c) Montrer que f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

2) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Montrer que $(\forall t\geqslant 0)\,;\, 0\leqslant e^{-t}+t-1\leqslant \frac{t^2}{2}$

c) En déduire que : $(\forall x>0)\,;\, -\frac{4}{x}\leqslant f(x)-x\leqslant \frac{4}{x^2}-\frac{2}{x}$

d- En déduire que la courbe (C_f) admet une asymptote oblique (Δ) dont on donnera une équation

3) Tracer (C_f) et (Δ)

Partie B: Soit n un entier naturel non nul

On considère la fonction f_n définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = (x + \frac{2}{n})e^{-\frac{2}{x}} \; ; x > 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$$

1) Montrer que f_n est dérivable à droite en 0.

2) Étudier les variations de la fonction f_n sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

3) a) Montrer que : Pour tout n de $\mathbb{N}^*$; l'équation $f_n(x) = \frac{2}{n}$ admet une seule solution a_n sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

b) Montrer que : $(\forall x \in]0; +\infty[) ; (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; f_{n+1}(x) - \frac{2}{n+1} > f_n(x) - \frac{2}{n}$

c) En déduire que la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante puis montrer qu'elle est convergente.

On pose $a = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$

d) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; na_n = 2e^{\frac{2}{a_n}} - 2$.

e) Montrer que $a = 0$