Exercice

1) a) Montrer que : $(\forall x \in [0;+\infty[)\,;-\frac{x^3}{3} \leq Arc\tan(x) - x \leq -\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}$

b) En déduire que : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{Arc\tan(x) - x}{x^2} = 0$

2) Montrer que : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{Arc\tan\left(\frac{x}{x+1}\right) - x}{x^2} = -1$

Exercice

Soit f une fonction continue sur $[0;1]$ et dérivable sur $]0;1[$ telle que : $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$

Montrer que : $(\exists c \in]0;1[)\,; 2c\, f'(c) = \sqrt{c}$

Exercice 13

Soit f une fonction continue sur $[0;1]$ et dérivable sur $]0;1[$ telle que : $f(0) \neq f(1)$ et $f'(x) \neq 0$ pour tout réel x de $]0;1[$

Montrer que : $(\exists! c \in]0;1[)\,; f(0) - f(1) = 2 f(c)$

Exercice 14

Soit a, b et c des nombres réels donnés non tous nuls.

Montrer que l'équation : $4ax^3 + 3bx^2 + 2cx - (a+b+c) = 0\,; x \in \mathbb{R}$ admet au moins une solution dans l'intervalle $]0;1[$.

Exercice

1) a) Soit a et b des réels tels que : $0 \leq a < b$

Montrer que : $\frac{1}{1+b^2} < \frac{Arc\tan(b) - Arc\tan(a)}{b-a} < \frac{1}{1+a^2}$

b) En déduire que : $(\forall x \in]0;+\infty[)\,; \frac{1}{1+x^2} < \frac{Arc\tan(x)}{x} < 1$

2) Application :

a) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \frac{Arc\tan(x)}{x} & ; x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

Montrer que la fonction f est continue en $x_0 = 0$, puis étudier sa dérivabilité en $x_0 = 0$.

b) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $g(x) = (x-1)^2 \times Arc\tan\left(\frac{1}{x}\right)$

Etudier la nature des branches infinies de la courbe de la fonction g au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

Exercice

En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer les inégalités suivantes :

1) $(\forall x \in]-\infty;0[)\ ;\ Arc\tan(x) < \frac{x}{1+x^2}$

2) $\frac{1}{\cos^2 a} < \frac{\tan b - \tan a}{b-a} < \frac{1}{\cos^2 b}$ où a et b sont deux réels tels que :

$$0 < a < b < \frac{\pi}{2}$$

3) $(\forall (x;y) \in ([0;10])^2)\ ;\ |x\cos x - y\cos y| \leq 11 \times |x-y|$

4) $(\forall x \in]0;1[)\ ;\ |f(x) - f(y)| < \frac{1}{4\cos^2(1)} \times |x-y|$ où $f(t) = \frac{1}{4}\tan\left(\frac{1}{1+t}\right)$

5) $(\forall (x;y) \in (]0;2[)^2)\ ;\ |g(x) - g(y)| < \frac{\sqrt{2}}{12}|x-y|$ où $g(t) = Arc\tan(\sqrt{t+2})$

Exercice 17

1) Enoncer le théorème des accroissements finis.

2) Montrer que : $\left(\forall x \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[\right)\ ;\ 1 < \frac{\tan(x)}{x} < 1 + \tan^2(x)$, en appliquant le théorème des accroissements finis.

Exercice 18

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[0;+\infty[$ et dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$ telle que : $f(0) = 0$ et la fonction f' est décroissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

1) Montrer que : $(\forall x \in]0;+\infty[)\ ;\ f(x) \geq x\, f'(x)$

2) Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $g(x) = \frac{f(x)}{x}$

Montrer que la fonction g est décroissante sur $]0;+\infty[$.

Exercice 19

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{4}\right[$ par :

$$f(x) = 2x + \sin(x) - \cos(x)$$

1) Montrer que : $\left(\exists! \alpha \in \left]0;\frac{\pi}{4}\right[\right) / f(\alpha) = \alpha$

2) Montrer que : $\left(\forall x \in \left[0;\frac{\pi}{4}\right]\right);|f'(x)| \leq 4$

3) Montrer que : $\left(\exists! \alpha \in \left[0;\frac{\pi}{4}\right]\right) / |f(x)-\alpha| \leq \pi$

Exercice

Soit f une fonction continue sur $[0;1]$ et dérivable sur $]0;1[$ telles que :

$$f(0)=0 \text{ et } f(1)=4$$

Montrer que : $(\exists c \in]0;1[) / \sqrt[4]{c^3} \times f'(c) = 1$

Exercice 21

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 1 - x + Arc\tan(x)$

et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) a) Montrer que le point $I(0;1)$ est un centre de symétrie de (C).

b) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

2) a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ et que : $2 < \alpha < \frac{5}{2}$

3) a) Etudier les branches infinies de la courbe (C).

b) Tracer la courbe (C).

4) a) Montrer que la fonction f^{-1} est dérivable en tout point de $\mathbb{R}-\{1\}$

et que : $(\forall x \in \mathbb{R}-\{1\}); 1 + (f^{-1})'(x) + \frac{1}{(f^{-1}(x))^2} = 0$

b) Montrer que : $\left(\exists c \in \left]\frac{\pi}{4};1\right[\right); \left(\frac{\pi}{4}-1\right)\left(1+\frac{1}{(f^{-1}(c))^2}\right) = -1$

Exercice 22

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{\tan(x)}; & \dfrac{\pi}{4} \leq x < \dfrac{\pi}{2} \\ f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

1) Montrer que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$

2) Montrer que : $-2 \leq f'(x) \leq -1$ pour tout réel x de $\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$

3) En déduire que : $\frac{\pi}{2} - 2x \leq \frac{1-\tan x}{\tan x} \leq \frac{\pi}{4} - x$ pour tout réel x de $\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right[$

4) a) Montrer que f admet une fonction réciproque définie sur l'intervalle $[0;1]$.

b) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout réel x de $[0;1]$.

Exercice

1) a et b deux réels tels que : $a < b$

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a;b]$ et dérivables sur $]a;b[$ telle que $g'(x) \neq 0$ pour tout réel x de $]a;b[$.

a) Montrer que : $g(a) \neq g(b)$

b) En considérant la fonction φ définie sur $[a;b]$ par :

$$\varphi(x) = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \times (g(x)-g(a)) - (f(x)-f(a))$$

Montrer que : $(\exists c \in]a;b[)$; $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$

2) Application :

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to 0}\left(\frac{x-\sin x}{x^3}\right)$ b) $\lim\limits_{x \to 0}\left(\frac{x - Arc\tan(x)}{x^3}\right)$

Exercice

a et b deux nombres réels avec $a < b$.

Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ et dérivable sur l'intervalle $[a;b$ telle que :

$f(a) = f(b) = 0$ et $f'_d(a) = 0$

Montrer que : $(\exists c \in]a;b[)$; $f'(c) = \frac{f(c)}{c-a}$

Exercice

n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Soit f une fonction continue sur $[0;1]$ et dérivable sur l'intervalle $]0;$ telle que :

$f(0) = 0$ et $f(1) = 1$

Montrer que : $(\exists (a;b;c) \in (]0;1[)^3)$; $f'(a) \times f'(b) = \frac{1-c^n}{1-c} \times c^{n-1}$

Exercice

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ telle que :
$(\exists \alpha \in]0;+\infty[);(\forall x \in \mathbb{R})\ ;\ f''(x) \geq \alpha$

1) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) = -\infty$

2) Montrer que f' réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On note : g la bijection réciproque de l'application f'.

3) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = xg(x) - f(g(x))$

Montrer que la fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$, puis calculer $g'(x)$ pour tout réel x.

Exercice

Soit a et b deux nombres réels avec $a < b$.

Soit f une fonction numérique continue sur le segment $[a;b]$ et deux fois dérivable sur l'intervalle $]a;b[$ telle que : $f(a) = f(b) = 0$ et $f''(x) \neq 0$ pour tout réel x de $]a;b[$.

Montrer que : $(\forall x \in]a;b[)\ ;\ f(x) \neq 0$

Exercice

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[0;+\infty[$, dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = f(0)$

On considère la fonction F définie sur l'intervalle $[0;1]$ par :

$$\begin{cases} F(x) = f\left(\dfrac{1}{x} - 1\right);0 < x \leq 1 \\ F(0) = f(0) \end{cases}$$

1) Montrer que la fonction $\varphi : x \mapsto \dfrac{1}{x} - 1$ réalise une bijection de l'intervalle $]0;1]$ sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

2) a) Montrer que la fonction F est continue sur $[0;1]$.

b) Montrer que la fonction F est dérivable sur l'intervalle $]0;1[$.

3) Montrer que : $(\exists c \in]0;+\infty[)\ /\ f'(c) = 0$

4) On suppose que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$ pour tout réel $x > 0$.

Montrer que le réel c est unique.