1) a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)$; $\operatorname{Arc}\tan(x) + \operatorname{Arc}\tan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$

b) En déduire : $(\forall x \in \mathbb{R}_-^*)$; $Arc\tan(x) + Arc\tan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}$

2) Montrer que : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{Arc\tan x}{x} = 1$

3) Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{Arc\tan(x^2 - x)}{x}$ b) $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{Arc\tan\left(\sqrt{x^2 + x}\right)}{\sqrt{x}}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} x Arc\tan\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ d) $\lim\limits_{x \to +\infty} x\left(Arc\tan(\sqrt{x}) - \frac{\pi}{2}x\right)$

e) $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{Arc\tan\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - x\right) - \frac{\pi}{2}}{\sqrt{x}}$

4) Résoudre dans $\mathbb{R}^+$ l'équation: $Arc\tan x + Arc\tan(x - 1) = \frac{\pi}{2}$

Exercice 32

Soit f une fonction numérique définie et continue sur $\mathbb{R}$ telle qu'il existe au moins un réel a qui vérifie : $(f o f)(a) = a$

Montrer que : $(\exists c \in IR)$; $f(c) = c$

Exercice 33

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ telle que : $f(x) \neq 0$ pour tout x de I.

Montrer que : $\left((\forall x \in I); f(x) > 0\right)$ ou $\left((\forall x \in I); f(x) < 0\right)$

Exercice 34

1) Soit f une fonction définie et continue sur le segment $[a;b]$ telle que $f(x) > 0$ pour tout x de $[a;b]$.

Montrer que : $(\exists \alpha \in IR_+^*);(\forall x \in [a;b])$; $f(x) \geq \alpha$

2) Soit g fonction définie et continue sur le segment $[a;b]$ telle que $g(x) \neq x$ pour tout x de $[a;b]$.

Montrer que : $(\exists \beta \in IR_+^*);(\forall x \in [a;b])$; $|g(x) - x| \geq \beta$

Exercice 35

Soit f et g deux fonctions numériques et continues sur le segment $[0;1]$ telles que : $g(0) = f(1)$ et $g(1) = f(0)$. Montrer que : $(\exists c \in [0;1])$; $f(c) = g(c)$

Exercice 36

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \frac{1}{x}\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - \sqrt{x^2 + 2x}\right) - 1$

1) Déterminer D l'ensemble de définition de f.

Montrer que :

$$(\exists(\alpha;\beta)\in IR^2);\left(\forall x\in\left[\frac{1}{2};1\right]\right);\ \alpha x\leq\sqrt{1+\frac{1}{x}}-\sqrt{x^2+2x}\leq\beta x$$

) Montrer que : $\left(\exists c\in\left[\frac{1}{2};1\right]\right);\sqrt{1+\frac{1}{c}}-\sqrt{c^2+2c}=c$

xercice

oit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=2x^3+x-1$

.) a) Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur ın intervalle J à déterminer.

b) En déduire la monotonie de f^{-1} sur J

2) a) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$ et que : $0<\alpha<1$

b) Calculer $\lim\limits_{x\to\alpha^+}\frac{\sqrt[3]{f(x)}}{x-\alpha}$

Exercice

On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $]-\infty;3]$ par :

$$f(x)=Arc\tan\sqrt{3-x}$$

1) Calculer $\lim\limits_{x\to3^-}\frac{f(x)}{x-3}$.

2) Montrer que f est bijective de l'intervalle $]-\infty;3]$ sur un intervalle J à déterminer.

3) Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout x de J.

4) Montrer qu'il existe un réel α de l'intervalle $]2;3[$ tel que : $f(\alpha)=1-\frac{\alpha}{4}$

Exercice

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f puis simplifier so expression

1) $f(x)=Arc\tan\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)$

2) $f(x)=Arc\tan\left(\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}\right)$

3) $f(x)=Arc\tan\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

4) $f(x)=Arc\tan\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)$

5) $f(x)=Arc\tan(\sqrt{1+x^2}-x)$

6) $f(x)=Arc\tan\left(\frac{3x-x^3}{1-3x^2}\right)$;

(Calculer $\tan(3\alpha)$ en fonction de $\tan\alpha$).

Exercice

1) Soit g la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par :

$$g(x)=\frac{1-x^2}{1+x^2}$$

a-Montrer que g est une bijection de $[0; +\infty[$ sur $]-1; 1]$;

b-Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout x de l'intervalle $]-1; 1]$.

2) Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = Arc\tan\left(\frac{1 - x^2}{1 + x^2}\right)$$

a- Montrer que f est une bijection de $[0; +\infty[$ sur un intervalle J à déterminer ;

b- Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout x de J ;

c- Calculer : $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x)}{x - 1}$.