Exercice

Soit F l'application définie sur $\mathbb{C} \setminus \{ i \}$ par : $F(z) = \dfrac{iz - 1}{z - i}$.

1) a) Vérifier que : $(\sqrt{3} - i\sqrt{3})^2 = -6i$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $F(z) = iz$.

c) Écrire les solutions de cette équation sous forme trigonométrique.

d) Soit A et B les points images des solutions de (E), dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$.

Montrer que les points O, A et B sont alignés.

2) Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$.

a) Montrer que : $F(z) = -\dfrac{z+\overline{z}}{|z-i|^2} + i\dfrac{z\overline{z}-1}{|z-i|^2}$.

b) En déduire que : $|z| = 1 \Longrightarrow F(z) \in \mathbb{R}$.

Exercice 43

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.

1) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : (E) : $z^2 - 4z + 8 = 0$

b) Soit z_1 et z_2 les solutions de l'équation (E) telles que $\mathrm{Im}(z_1) > 0$.

- Écrire z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.
- Placer les points $A(z_1)$ et $B(z_2)$.

2) Soit f la transformation qui à tout point $M(z)$ (avec $z \in \mathbb{C}^*$) associe le point $M'(z')$ tel que : $z' = \frac{1}{z}$.

a) Déterminer l'affixe de chacun des points A' et B' tels que : $f(A) = A'$ et $f(B) = B'$.

b) Montrer que pour tout point M distinct de O; les points O; M et M' sont alignés et que : $OM' \times OM = 1$

3) a) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $|z-2| = 2 \Leftrightarrow \left|\frac{1-2\overline{z'}}{\overline{z'}}\right| = 2$

En déduire que : $|z-2| = 2 \Leftrightarrow \left|\frac{1}{2} - z'\right| = |z'|$

b) Soit $(\mathscr{C})$ le cercle de centre $I(2)$ et de rayon 2

- Montrer que $[AB]$ est un diamètre du cercle $(\mathscr{C})$
- Montrer que $M \in \mathscr{C} \setminus \{O\}$ si et seulement si M' appartient à une droite (D) dont on donnera une équation.
- Construire $(\mathscr{C})$ et (D).
- En déduire une méthode géométrique pour construire M' image de M par la transformation f si $M \in (\mathscr{C}) \setminus \{O\}$.

Exercice

Exercice 46

On considère la suite complexe (z_n) définie par :

$$\begin{cases} z_0 = 1 \\ z_{n+1} = \left(\frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right) z_n \ ; \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

On note A_n le point d'affixe z_n.

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $d_n = |z_{n+1} - z_n|$

a) Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $z_{n+1} - z_n = \left(\frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(z_n - z_{n-1})$

b) En déduire d_n en fonction de n.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $L_n = \sum_{k=0}^{n} A_k A_{k+1}$

- Exprimer L_n en fonction de n.

- Calculer $\lim_{n \to +\infty} L_n$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $a_n \equiv \arg(z_n) [2\pi]$.

a) Déterminer a_{n+1} en fonction de a_n.

b) En déduire a_n en fonction de n.

c) Déterminer les valeurs de n pour lesquelles les points O, A_0 et A_n sont alignés.

Exercice 47

Exercice 58

Partie A :

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) suivante :

$$(E): z^2-(1+2i)z+1+7i=0$$

1) Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est : $\Delta=(3-4i)^2$

2) Déterminer z_1 et z_2 les solutions de l'équation (E).

(On note z_1 la solution telle que $\mathrm{Re}(z_1)>0$)

3) Montrer que : $\frac{z_2}{z_1}=\sqrt{2}.e^{i\frac{3\pi}{4}}$

Partie B:

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives $a=2-i$ et $b=-1+3i$.

Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$, et soit T la translation qui transforme le point A au point O.

1) a) Soit c l'affixe du point C ; image du point A par la rotation R.

Déterminer le nombre complexe c.

b) Montrer que : $T(C)=B$

2) Soit D le point du plan complexe pour lequel $OCDB$ est un parallélogramme.

Déterminer d l'affixe du point D et vérifier que le point C est le milieu du segment $[AD]$.

3) Montrer que le nombre $\left(\frac{a-d}{b-d}\right)\times\frac{b}{a}$ est réel puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.

Exercice

Exercice 64 **Session Normale 2018**

Soit m un nombre complexe

Partie I:

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation:

$$(E_m): z^2 + (im+2)z + im + 2 - m = 0$$

1) a) Vérifier que $\Delta = (im-2i)^2$ est le discriminant de l'équation (E_m)

b) Donner, suivant les valeurs de m, l'ensemble des solutions de l'équation (E_m)

2) Pour $m = i\sqrt{2}$, écrire les deux solutions de l'équation (E_m) sous la forme exponentielle.

Partie II:

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$

On considère les points A,Ω,M et M' d'affixes respectives $a=-1-i$, $\omega = i$, m et $m' = -im-1+i$

1) Soit R la rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$ qui transforme M en M'.

a) Vérifier que Ω est le centre de la rotation R

b) Déterminer l'affixe b de B, où B est le point tel que $A = R(B)$.

2) a) Vérifier que: $m' - a = \frac{\omega - a}{\omega - b}(m-b)$

b) En déduire que les points A,M et M' sont alignés si et seulement si les points A,B,Ω, et M sont Cocycliques.

c) Montrer que l'ensemble des points M tels que les points A,M et M' sont alignés est un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.