Exercice 75 **BAC 2020 (session Normale) :**

On considère dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation $(D): 7x^3 - 13y = 5$

1) Soit $(x;y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ une solution de l'équation (D)

a) Montrer que x et 13 sont premiers entre eux.

b) En déduire que : $x^{12}\equiv 1[13]$

c) Montrer que : $x^3\equiv 10[13]$

d) En déduire que : $x^{12}\equiv 3[13]$

2) Déduire des questions précédentes, que l'équation (D) n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

Exercice 76 **BAC 2019 (session normale) :**

On admet que 2969 (année amazighe actuelle) est un nombre premier.

Soient n et m deux entiers naturels vérifiant : $n^8+m^8\equiv 0[2969]$

1) On suppose dans cette question que 2969 ne divise pas n.

a) En utilisant le théorème de BEZOUT, montrer que :

$$(\exists u\in\mathbb{Z})\,;\,u\times n\equiv 1[2969]$$

b) En déduire que : $(u\times m)^8\equiv -1[2969]$ et que $(u\times m)^{2968}\equiv -1[2969]$

(On remarque que : $2968 = 8\times 371$)

c) Montrer que 2969 ne divise pas $u\times m$.

d) En déduire qu'on a aussi $(u\times m)^{2968}\equiv\ 1[2969]$

2) a) En utilisant les résultats précédents, montrer que 2969 divise n.

b) Montrer que : $n^8+m^8\equiv 0[2969]\Leftrightarrow n\equiv 0[2969]$ et $m\equiv 0[2969]$

Exercice 77 **BAC 2018 (session normale) :**

Soit p un nombre premier tel que : $p = 3+4k$ où $(k\in\mathbb{N}^*)$.

1) Montrer que pour tout entier relatif x, si $x^2\equiv 1[p]$ alors : $x^{p-5}\equiv 1[p]$

2) Soit x un entier relatif vérifiant : $x^{p-5}\equiv 1[p]$

a) Montrer que x et p sont premiers entre eux.

b) Montrer que : $x^{p-1} \equiv 1[p]$

c) Vérifier que : $2+(k-1)(p-1)=k(p-5)$

d) En déduire que : $x^2 \equiv 1[p]$

3) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $x^{62} \equiv 1[67]$

Exercice 78 **BAC 2017 (session normale) :**

On admet que le nombre 2017 est premier et que : $2016 = 2^5 \times 3^2 \times 7$

Soit p un nombre premier tel que : $p \geq 5$

1) Soit le couple $(x;y)$ de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que : $px+y^{p-1}=2017$

a) Vérifier que : $p<2017$

b) Montrer que p ne divise pas y.

c) Montrer que $y^{p-1} \equiv 1[p]$ et en déduire que p divise 2016.

d) Montrer que : $p=7$

2) Déterminer, suivant les valeurs de p, les couples $(x;y)$ de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ vérifiant : $px+y^{p-1}=2017$

Exercice 79 **BAC 2016 (session normale) :**

Première partie :

Soit $(a;b)$ un élément de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que le nombre premier 173 divise a^3+b^3.

1) Montrer que : $a^{171} \equiv -b^{171}[173]$ (Remarquer que : $171 = 3 \times 57$)

2) Montrer que : 173 divise a si et seulement si 173 divise b.

3) On suppose que 173 divise a, montrer que 173 divise $(a+b)$.

4) On suppose que 173 ne divise pas a.

a) En utilisant le théorème de Fermat, montrer que : $a^{172} \equiv b^{172}[173]$

b) Montrer que : $a^{171}(a+b) \equiv 0[173]$

c) En déduire que 173 divise $(a+b)$.

Deuxième partie :

On considère dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ l'équation suivante : (E): $x^3+y^3=173(xy+1)$

Soit $(x;y)$ un élément de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ solution de (E), on pose : $x+y=173k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$

1) Vérifier que : $k(x-y)^2+(k-1)xy=1$

2) Montrer que $k = 1$ puis résoudre l'équation (E).

Exercice 80 **BAC 2015 (session normale) :**

Soit x un nombre entier relatif tel que : $x^{1439} \equiv 1436[2015]$

1) Sachant que : $1436 \times 1051 - 2015 \times 749 = 1$, montrer que 1436 et 20

sont premiers entre eux.

2) Soit d un diviseur commun de x et 2015.

a) Montrer que d divise 1436.

b) En déduire que : $x \wedge 2015 = 1$

3) a) En utilisant le théorème de Fermat, montrer que : $x^{1440} \equiv 1[5]$ et $x^{1440} \equiv 1[13]$ et $x^{1440} \equiv 1[31]$ (Remarquer que : $2015 = 5 \times 13 \times 31$)

b) Montrer que : $x^{1440} \equiv 1[65]$ puis que : $x^{1440} \equiv 1[2015]$

4) Montrer que : $x \equiv 1051[2015]$

Exercice 81 **BAC 2015 (session rattrapage) :**

I/ 1) Soit $a \in \mathbb{Z}$. Montrer que si a et 13 sont premiers entre eux, alors : $a^{2016} \equiv 1[13]$

2) On considère dans l'ensemble $\mathbb{Z}$ l'équation (E): $x^{2015} \equiv 2[13]$.

Soit x une solution de (E).

a) Montrer que x et 13 sont premiers entre eux.

b) Montrer que : $x \equiv 7[13]$

3) Montrer que l'ensemble de solutions de l'équation (E) est :

$$S = \{7 + 13k / k \in \mathbb{Z}\}$$

II/ Une urne U contient 50 boules numérotées de 1 à 50 et indiscernables au toucher

1) On tire au hasard une boule de l'urne.

Quelle est la probabilité que le numéro de la boule tirée soit solution de l'équation (E) ?

2) On tire au hasard une boule de l'urne, on marque son numéro puis on la remet dans l'urne. On répète trois fois cette expérience.

Quelle est la probabilité d'obtenir exactement deux fois une boule dont le numéro est solution de l'équation (E) ?

Exercice 82 **BAC 2014 (session normale) :**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $a_n = \underbrace{333...3}_{n\ fois}1$ (n fois le chiffre 3)

1) Vérifier que les deux nombres a_1 et a_2 sont premiers.

2) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $3a_n + 7 = 10^{n+1}$

3) Montrer que pour tout k de $\mathbb{N}$: $10^{30k+2} \equiv 7[31]$

4) Montrer que pour tout k de $\mathbb{N}$: $3a_{30k+1} \equiv 0[31]$, puis en déduire que 31 divise a_{30k+1}

5) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, si $n \equiv 1[30]$ alors l'équation $a_n x + 31y = 1$ n'admet pas de solutions dans $\mathbb{N}^2$.

Exercice 83 **BAC 2013 (session normale) :**

L'objectif de l'exercice est de déterminer les entiers naturels n strictement supérieurs à 1 et qui vérifient la propriété suivante : (R): $3^n - 2^n \equiv 0[n]$

1) On suppose que n vérifie la propriété (R) et soit p le plu it diviseur premier positif de n.

a) Montrer que : $3^n - 2^n \equiv 0[p]$, en déduire que $p \geq 5$

b) Montrer que : $2^{p-1} \equiv 1[p]$ et $3^{p-1} \equiv 1[p]$

c) Montrer qu'il existe un couple $(a;b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que : $an - b(p-1) = 1$

d) Soient r et q respectivement le reste et le quotient de la division euclidienne de a par $p-1$.

($a = q(p-1) + r$ avec $0 \leq r < p-1$ et $q \in \mathbb{Z}$)

Montrer qu'il existe un entier naturel k tel que : $nr = 1 + k(p-1)$

2) En déduire de tout ce qui précède qu'il n'existe pas d'entier naturel n strictement supérieur à 1 vérifiant (R).

Exercice 84 **BAC 2012 (session normale) :**

Dans $\mathbb{Z}^2$, on considère l'équation : $143x - 195y = 52$

1) a. Déterminer le plus grand commun diviseur de 195 et 143.

En déduire que l'équation (E) admet des solutions dans $\mathbb{Z}^2$.

b. Sachant que $(-1, -1)$ est une solution particulière de l'équation (E), trouver toutes les solutions de (E) dans $\mathbb{Z}^2$.

2) Soit n un nombre entier naturel non nul premier avec 5.

Montrer que pour tout nombre entier naturel k : $n^{4k} \equiv 1[5]$

3) Soit x et y deux nombres entiers naturels non nuls tels que: $x \equiv y[4]$

a. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $n^x \equiv n^y[5]$

b. En déduire que: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $n^x \equiv n^y[10]$

4) Soit x et y deux nombres entiers naturels non nuls tels que le couple (x,y) soit solution de l'équation (E)

Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, les nombres n^x ont le même chiffre d'unités dans le système de numérotation décimale.

Exercice 85 **BAC 2012 (session rattrapage) :**

1) a. Vérifier que 503 est un nombre premier.

b. Montrer que $7^{502} \equiv 1[503]$ puis en déduire que $7^{2008} \equiv 1[503]$

2) On considère dans $\mathbb{Z}^2$,l'équation : $49x - 6y = 1$ $\quad (E)$

Sachant que (1,8) est une solution particulière de (E), résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E). (On donnera toutes les étapes de la résolution).

3) On pose: $N = 1 + 7 + 7^2 + ... + 7^{2007}$

a) Montrer que $(7^{2006};N)$ est une solution de l'équation (E)

b) Montrer que $N \equiv 0[4]$ et $N \equiv 0[503]$

c) En déduire que N est divisible par 2012.

Exercice 86 **BAC 2011 (session normale) :**

Soit N le nombre entier naturel dont l'écriture dans le système décimal est:

$N = \underbrace{111...11}_{2010 \text{ uns}}$

1) Montrer que le nombre N est divisible par 11

2) a- Vérifier que le nombre 2011 est premier et que: $10^{2010} - 1 = 9N$

b- Montrer que le nombre 2011 divise le nombre $9N$

c- En déduire que le nombre 2011 divise le nombre N

3) Monter que le nombre N est divisible par 22121

Info: Critère de divisibilité par 11

Soit $N = a_n.a_{n-1}.....a_1a_0$ un entier naturel écrit en système décimal (en base 10) ; il contient $(n+1)$ chiffres.

$N = a_0 + a_1 \times 10 + a_2 \times 10^2 + ... + a_n \times 10^n$

Exercice 87 BAC 2011 (session rattrapage) :

Soit x un nombre entier naturel tel que: $10^x \equiv 2[19]$

1) a) vérifier que: $10^{x+1} \equiv 1[19]$

b) Montrer que: $10^{18} \equiv 1[19]$

2) Soit d le plus grand diviseur commun des deux nombres 18 et $x+1$

a) Montrer que: $10^d \equiv 1[19]$

b) Montrer que: $d = 18$

c) En déduire que: $x \equiv 17[18]$

Exercice 88 BAC 2010 (session Normale) :

1) Déterminer les nombres entiers naturels m tels que: $m^2 + 1 \equiv 0[5]$

2) Soit p un nombre premier tel que: $p = 3 + 4k$ où $k \in \mathbb{N}$ et soit n un nombre entier naturel tel que: $n^2 + 1 \equiv 0[p]$

a) Vérifier que: $(n^2)^{1+2k} \equiv -1[p]$

b) Montrer que les nombres n et p sont premiers entre eux.

c) En déduire que: $(n^2)^{1+2k} \equiv 1[p]$

d) En déduire , de ce qui précède , qu'il n'existe pas un nombre entier naturel n qui vérifie: $n^2 + 1 \equiv 0[p]$